

## ЛЕКЦИЯ № 6

### Инфинитное движение в кеплеровском и кулоновском потенциалах.

Откуда я пришел, не знаю...

Не знаю я, куда уйду...

Н.Гумилев

В отличие от Н.Гумилева, если нам известны при  $t = -\infty$  характеристики частицы, налетающей на силовой центр произвольного вида, то можно со всей определенностью найти ее характеристики после рассеяния при  $t \rightarrow +\infty$ . Рассмотрим этот вопрос на примере задачи Кеплера.

Периодическое движение по эллиптической орбите соответствует отрицательным значениям полной энергии системы. При переходе к положительным значениям энергии динамика системы существенно меняется – оно становится инфинитным. Но формулы, описывающие это движение претерпевают несложное преобразование. При  $E = 0$  эксцентриситет становится равным единице. Как видно из (5.5), при этом  $a, b \rightarrow \infty$ . Если во второй формуле из (5.4) сделать соответствующий переход, то легко получить уравнение параболы (см. Рис.7, кривая 2):

$$x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}. \quad (6,1)$$

Асимптотически на больших расстояниях потенциальная энергия стремится к нулю, и поэтому при  $E = 0$  кинетическая энергия также обращается в ноль. Т.е. частица «останавливается» на бесконечности. Поскольку  $r_{\min} = p/(1+e)$ , то с ростом энергии (ростом  $e$  при фиксированном  $M$ ) минимальное расстояние до центра поля монотонно убывает, проходя значение  $p/2$  при нулевой энергии.

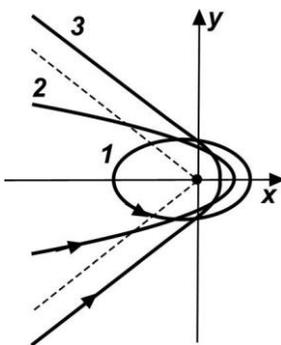


Рис.7

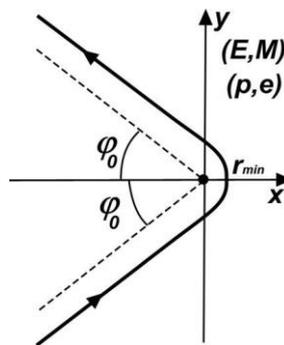


Рис.8

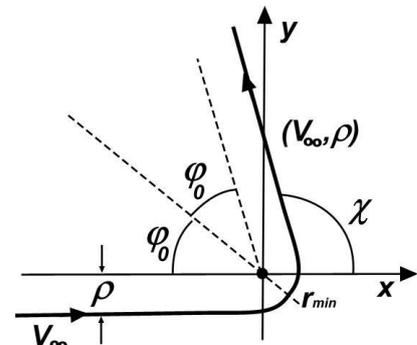


Рис.9

На Рис.7 эллипс 1 отвечает отрицательным энергиям, парабола 2 – нулевой энергии и гипербола 3 – положительным значениям энергии. При положительных энергиях эксцентриситет больше единицы и вторая формула (5.4) трансформируется таким образом:

$$\frac{(x + e \cdot a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6.2)$$

где теперь

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{M}{\sqrt{2mE}}. \quad (6.3)$$

Выражение (5.4)

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi \quad (6.4)$$

при  $E > 0$  остается в силе, но допустимые углы  $\varphi$  теперь ограничены значением  $-\arccos(1/e)$ . Удобно ввести другой угол  $\varphi_0 = \arccos(1/e)$ , приведенный на Рис.8. Такой рисунок обычно приводится при обсуждении задачи Кеплера при инфинитном движении. Он удобен для обсуждения «астрономических» задач типа прохождения астероида вблизи планеты с точки зрения наблюдателя на этой планете. Но с точки зрения стороннего наблюдателя над процессор рассеяния, например, частицы в микромире на рассеивающем центре, более удобна другая постановка задачи (Рис.9). На Рис.9 система координат повернута относительно системы на Рис.8 на угол  $\varphi_0$ . В этом случае частица налетает из бесконечности на рассеивающий центр, и важны ее характеристики на бесконечности до рассеяния. В этом пределе  $E = mV_\infty^2/2$  и скорость  $V_\infty$  является удобной характеристикой. В качестве второй характеристики удобно выбрать так называемое *прицельное расстояние*  $\rho$  (см. Рис.9). Его легко связать с угловым моментом  $M$ . Поскольку  $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}_\infty, \vec{V}_\infty] = m\rho V_\infty$ , то связь новых параметров со старыми такая:

$$V_\infty = \sqrt{2E/m}, \quad \rho = M / mV_\infty. \quad (6.5)$$

Кроме того, вводят т.н. *угол рассеяния*  $\chi$  между направлениями движения частицы при  $t = -\infty$  и  $t = +\infty$ . Из рисунка видно, что

$$\chi = \pi - 2\varphi_0 = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + (\rho m V_\infty^2 / \alpha)^2}}. \quad (6.6)$$

Из этой формулы видно, что при большом прицельном расстоянии или большой скорости налетающей частицы угол рассеяния мал, и такая ситуация соответствует т.н. *малоугловому рассеянию* с  $\chi \ll 1$ . Из формулы (6.6) следует простая связь прицельного расстояния с углом рассеяния:

$$\rho(\chi) = \left( \frac{\alpha}{mV_\infty^2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}. \quad (6.7)$$

Все полученные выше результаты для движения двух тел с гравитационным потенциалом притяжения  $U = -\alpha/r$  и с положительным  $\alpha$  переносятся на случай движения двух зарядов с разными знаками с кулоновским взаимодействием. Однако, при взаимодействии двух зарядов одинакового знака, т.е. с потенциалом взаимодействия  $U = \alpha/r$  с  $\alpha > 0$ , задача несколько изменяется. При замене  $\alpha \rightarrow -\alpha$  в (5.1) и (6.3) параметры  $p$  и  $a$  меняют знаки, но величины  $E_0$  и  $e$  в (5.1) и (5.2) не изменяются. При этом формулы для траектории движения принимают вид

$$\frac{p}{r} = -1 - e \cos \varphi, \quad \frac{(x - e \cdot a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6.8)$$

где все параметры  $p = M^2 / m\alpha$ ,  $a = \alpha / 2E$  и  $b = M / \sqrt{2mE}$  – положительны. На Ри.10 приведен вид этой траектории в виде кривой 1. На том же рисунке в виде кривой 2 приведена траектория движения с теми же параметрами ( $E, M$ ), но для кеплеровского потенциала. При этом одинаковы и параметры  $(V_\infty, \rho)$ .

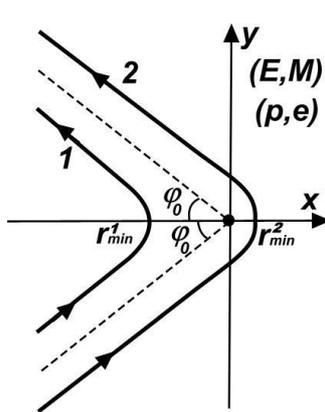


Рис. 10

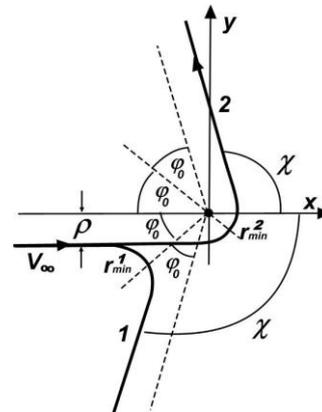


Рис.11

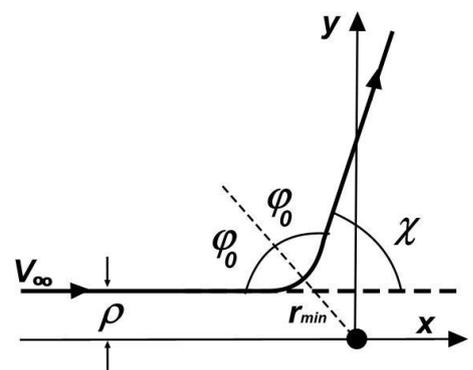


Рис.12

Приведенные две траектории подобны друг другу, но у них – различные значения минимального расстояния приближения рассеивающейся частицы к центру потенциала:  $r_{\min}^2 = p/(e+1)$  для потенциала Кеплера или зарядов разного знака и  $r_{\min}^1 = p/(e-1)$  для кулоновского потенциала зарядов одинакового знака. На Рис.10 приведена та же схема

рассеяния в «повернутой», как на Рис.9 системе координат с одинаковым знаком прицельного расстояния в двух случаях. Ниже задачи рассеяния мы будем рассматривать единообразно в обозначениях Рис.12.

Следует иметь в виде, что до сих пор мы рассматривали задачу двух тел в системе отсчета, связанной с центром инерции системы, в которой начало координат выбрано в точке расположения одной частицы. В лабораторной системе отсчета процесс рассеяния выглядит несколько иначе – см. Рис.13. Покоившаяся при  $t = -\infty$  частица с массой  $m_2$  при отталкивании между частицами испытывает «отдачу» и улетает под углом  $\vartheta_2$  к направлению распространения «налетающей» частицы с массой  $m_1$ . Поскольку при этом расстояние между частицами увеличивается по сравнению со случаем неподвижной второй частицы (т.е. энергия отталкивания уменьшается), то первая частица отклонится на угол  $\vartheta_1 < \chi$ . Выше была получена зависимость (6.7) угла рассеяния от прицельного расстояния  $\chi = \chi(\rho)$ . Для сравнения с экспериментом необходим пересчет этой зависимости и получение формул  $\vartheta_1 = \vartheta_1(\rho)$  и  $\vartheta_2 = \vartheta_2(\rho)$ . Однако, в случае больших значений  $\rho$  или  $V_\infty$ , т.е. при малоугловом рассеянии, зависимость  $\vartheta_1 = \vartheta_1(\rho)$  для налетающей частицы в лабораторной системе отсчета легко находится в общем случае произвольного потенциала взаимодействия (см. Рис. 14).

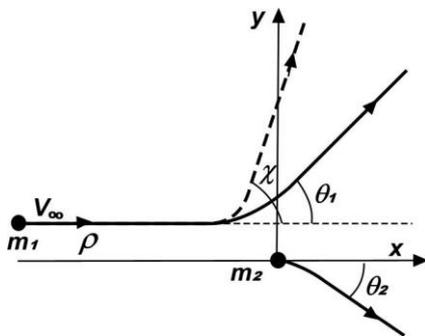


Рис.13

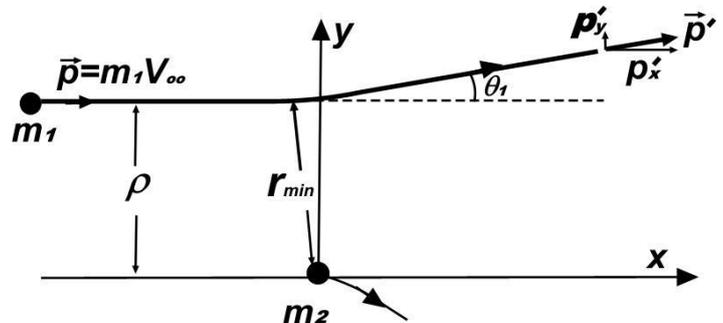


Рис.14

При малоугловом рассеянии отдачей покоящейся вначале частицы можно пренебречь. Кроме того, рассеивается уже реальная частица с массой  $m_1$ , а не с приведенной массой. После рассеяния импульс налетающей частицы меняется с  $\vec{p}$  на  $\vec{p}'$  и поворачивается на угол  $\vartheta_1$ . При  $\vartheta_1 \ll 1$  имеем  $\vartheta_1 \approx \text{tg } \vartheta_1 = p'_y / p'_x \approx p'_y / p = p'_y / m_1 V_\infty$ . Из закона Ньютона в форме  $d\vec{p} / dt = \vec{F}$  имеем:

$$p'_y = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dx}{dt} \approx - \frac{2}{V_\infty} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dx}{dr} dr \approx - \frac{2}{V_\infty} \int_{\rho}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{dr}{dy} \frac{dx}{dr} dr. \quad (6.9)$$

Мы воспользовались тем, что  $dx/dt \approx V_\infty$  и  $r_{\min} \approx \rho$ ). Учитывая, что  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $x = \sqrt{r^2 - y^2} \approx \sqrt{r^2 - \rho^2}$ , находим:  $dr/dy = y/r \approx \rho/r$  и  $dx/dr = r/\sqrt{r^2 - \rho^2}$ . После подстановки в (6.9) получаем окончательное выражение для зависимости угла рассеяния от прицельного расстояния (в лабораторной системе координат!):

$$\vartheta_1 \approx - \frac{2\rho}{m_1 V_\infty^2} \int_{\rho}^{\infty} \frac{\partial U(r)}{\partial r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (6.10)$$

В качестве примера рассмотрим кулоновский потенциал с  $U = \alpha/r$ . Подставляя эту функцию в интеграл в (6.10) получаем искомую зависимость

$$\vartheta_1 \approx \frac{2\alpha}{m_1 V_\infty^2} \frac{1}{\rho}. \quad (6.11)$$

Из сравнения с точной формулой (6.7) видно, что результаты совпадают при  $\chi \approx \vartheta_1 \ll 1$  и  $m \rightarrow m_1$ , что соответствует большой рассеивающей массе.